

ÉCOLE NATIONALE DES INGÉNIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRE
CONCOURS D'ENTRÉE
1978
OPTION BIOLOGIE- MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 3 heures

Un corrigé

-I-

1. (a) On remarque que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ pour tous x et y positifs, puis par développement de cette inégalité on obtient $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. L'inégalité $a_n \leq b_n$ est une conséquence immédiate de l'inégalité précédente, avec $x = a_{n-1}$ et $y = b_{n-1}$ (les deux suites sont bien définies et toujours positives).
- (b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

Donc $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De même,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n a_n} = a_n.$$

Donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

On sait déjà que $b_{n+1} - a_{n+1} \geq 0$. De plus,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n + a_n - 2\sqrt{b_n a_n}}{2}.$$

Puisque $0 \leq a_n \leq b_n$ et par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$, on a $\sqrt{a_n b_n} \geq a_n$. On en déduit que

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n + a_n - 2a_n}{2} = \frac{1}{2}(b_n - a_n).$$

De la relation précédente, on déduit par une récurrence immédiate que, pour tout entier naturel n , on a

$$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0).$$

Ainsi, $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. On en déduit que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes : elles convergent vers la même limite, notée $M(a, b)$.

2. • Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, les suites $(\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\lambda b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient les relations de récurrences (2), donc elles convergent vers $M(\lambda a_0, \lambda b_0) = M(\lambda a, \lambda b)$. D'où par unicité de la limite :

$$M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b) \quad (*).$$

- Soient les suites $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $\begin{cases} a'_0 = b \\ a'_n = a_n, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ et $\begin{cases} b'_0 = a \\ b'_n = b_n, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Les suites $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (respectivement $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$) ne diffèrent que par leur premier terme, elles ont donc même limite et donc $M(b, a) = M(a, b)$.

- Les suites $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $\begin{cases} a'_0 = a_1 \\ a'_n = a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ et $\begin{cases} b'_0 = b_1 \\ b'_n = b_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ sont convergentes de même limite et donc $M(a, b) = M(a_1, b_1) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$.

- Soient les suites (a_n) (a'_n) , (b_n) , $(b'_n)_n$ définies par les relations (2) et $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$, $\begin{cases} a'_0 = a' \\ b'_0 = b \end{cases}$ avec $a \leq a'$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $a_n \leq a'_n$. La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons $a_n \leq a'_n$. On a $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $a'_{n+1} = \sqrt{a'_n b_n}$, donc $a_{n+1} \leq a'_{n+1}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a'_n$ et en passant à la limite quand n tend vers l'infini $M(a, b) \leq M(a', b)$.

3. • Si $a = b = 1$ on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = 1$. Donc $f(1) = M(1, 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

- D'après la relation (*) $M(x, 1) = xM\left(1, \frac{1}{x}\right)$ et donc $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}f(x)$.

• Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_1 = \sqrt{ab} \leq a_n \leq b_n \leq b_1 = \frac{a+b}{2}$, soit en prenant la limite quand n tend vers l'infini et en utilisant le prolongement des inégalités

$$\sqrt{ab} \leq M(a, b) \leq \frac{a+b}{2}.$$

En particulier, si $a = x$ et $b = 1$ on obtient $\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}$.

- D'après l'égalité 454 on a :

$$f(x) = M(x, 1) = M\left(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2}\right) = \sqrt{x}M\left(1, \frac{1+x}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}f\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right).$$

En combinant 8 et 9 on obtient $f(x) = \sqrt{x}f\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)$ et $f\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1+x}{2}f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$. D'où :

$$f(x) = \frac{1+x}{2}f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$

4. (a) Soit $x_0 \in]0, +\infty[$. Montrons que les limites à droite et à gauche coïncident. Désignons par $l = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

et $l' = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. Comme f est croissante alors $l' \leq f(x_0) \leq l$. D'autre part, $\frac{l}{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{x}$ et $\frac{l'}{x_0} =$

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{x_0}$ et puisque $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante alors $\frac{l'}{x_0} \leq \frac{l}{x_0}$. D'où $l' = l$ et donc f est continue en x_0 .

- (b) Il suffit de montrer que f est croissante sur $]0, +\infty[$ et que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. En effet,

d'après la question 2 de cette partie $M(x, 1) \leq M(y, 1)$ si $0 < x < y$ et l'égalité $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x}$ montre que

$x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

5. (a) D'après l'inégalité $\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}$ montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- (b) f admet une limite en 0 car elle est croissante sur $]0, +\infty[$, cette limite n'étant autre que la borne inférieure de l'ensemble $\{f(x) \mid x > 0\}$. Soit l cette limite, d'après l'égalité $f(x) = \frac{1+x}{2}f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ on $l = \frac{l}{2}$ soit $l = 0$.

- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$. Donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique dans la direction $(0x)$.

-II-

1. Comme $v_0 = u_0 \cos(\theta)$, on obtient :

$$v_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = a \frac{1 + \cos(\theta)}{2} = a \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

puis :

$$u_1 = \sqrt{u_0 v_1} = a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Pour continuer à exprimer les termes v_n , on exprime (v_n) indépendamment de (u_n) : pour tout $n > 0$,

$$u_{n+2} = \sqrt{v_{n+2} u_{n+1}} = \sqrt{\frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2}} \times u_{n+1} = \sqrt{\frac{\frac{u_{n+1}^2}{u_n} + u_{n+1}}{2}} \times u_{n+1} = u_{n+1} \sqrt{\frac{1 + \frac{u_{n+1}}{u_n}}{2}}.$$

Ainsi, on trouve par exemple :

$$u_2 = u_1 \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}} = u_1 \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right)} = a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{4}\right)$$

(les cosinus étant positif, θ étant par définition dans $]0, \frac{\pi}{2}[$). Ainsi, on voit apparaître le début du produit

de cosinus de la forme $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$. On effectue alors une récurrence. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété

$P(n)$: $u_n = a \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$. Nous venons de montrer que $P(0)$ et $P(1)$ sont vrais. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vrais. Alors, par les hypothèses de récurrence,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right),$$

donc, d'après la relation établie ci-dessus,

$$u_{n+2} = u_{n+1} \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2}} = u_{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+2}}\right) = a \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+2}}\right) = a \prod_{k=1}^{n+2} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

Par conséquent, $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $P(n)$ et $P(n+1)$ entraînent $P(n+2)$. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Vérifions ensuite par récurrence $u_n = \frac{a}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$. la propriété est vraie pour $n = 0$. On suppose que la propriété est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{a}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{a}{2^n \sin(\theta)} \times \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} \times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{a}{2^{n+1}} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$$

Cela montre que la propriété est vraie pour $n+1$. D'après le principe de récurrence, $u_n = \frac{a}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

D'après la relation $u_n = \sqrt{u_{n-1} v_n}$, on obtient $v_n = \frac{u_n^2}{u_{n-1}} = \dots$

- Supposons $a > b$, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: $0 \leq v_n \leq u_n$. La propriété $P(0)$ est satisfaite d'après l'hypothèse $a > b$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vrai. Alors on obtient :

$$0 \leq v_{n+1} \leq u_n$$

puis : $u_{n+1} > \sqrt{(v_{n+1})^2} \geq v_{n+1}$. Ainsi, la propriété $P(n+1)$ est encore vraie. D'après le principe de récurrence, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit alors de la relation définissant v_{n+1} , de la même manière que ci-dessus, que : $v_n \leq v_{n+1} \leq u_n$, puis de la seconde relation, que

$$u_{n+1} = \sqrt{v_{n+1} u_n} \leq \sqrt{u_n^2} = u_n,$$

d'où la croissance de (v_n) et la décroissance de (u_n) .

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par u_0 , et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par v_0 . Donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) et (v_n) convergent.

Appelons β la limite de (v_n) et α la limite de (u_n) . Alors, on montre comme plus haut, en passant à la limite dans la relation définissant v_{n+1} , que $\alpha = \beta$.

Par conséquent, d'après le calcul précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{a}{\theta} \left(\frac{\theta}{2^n} \right) \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}.$$

On peut donc conclure :

$$N(a, b) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \frac{\sin(\theta)}{\theta}.$$

3. La propriété est vraie pour $n = 0$ puisque $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n) : u_n \geq a_n$ et $v_n \geq b_n$.

La propriété $P(0)$ est satisfaite d'après les hypothèses. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors on obtient :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \geq \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}$$

et comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_{n+1}} \geq \sqrt{a_n v_n} \geq \sqrt{a_n b_n} = a_{n+1}.$$

Ainsi, la propriété $P(n+1)$ est encore vraie. D'après le principe de récurrence, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq a_n$ et $v_n \geq b_n$.

4. Ici $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $b = \frac{1}{4} = a \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. D'où $N\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\pi}$.

5. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a_n$, alors $N(a, b) \geq M(a, b)$.

On a $M\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} M(\sqrt{2}, 1) = \frac{1}{4} f(\sqrt{2}) < \frac{1 + \sqrt{2}}{8} < \frac{3}{8}$ et $N\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{\pi} > \frac{3}{8}$. Donc on peut pas avoir une égalité.

-III-

1. Si $0 < x < y$, alors $\forall \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\sqrt{x^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \leq \sqrt{y^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}$, donc $\frac{1}{\sqrt{x^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \geq$

$\frac{1}{\sqrt{y^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$ puis par intégration $F(x) \geq F(y)$, la fonction F est donc décroissante sur $]0, +\infty[$.

2. Pour tous $x, y \in]0, +\infty[$, on a :

$$I(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}.$$

D'où :

$$yI(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right).$$

En particulier si $x = 1$, on obtient $yI(1, y) = F\left(\frac{1}{y}\right)$. D'autre part, en faisant le changement de variable

$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, bijectif et de classe $\mathcal{C}^1$, on trouve $I(a, b) = I(b, a)$. D'où $yI(1, y) = yI(y, 1) = yF(y) = F\left(\frac{1}{y}\right)$.

Ainsi,

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = xF(x).$$

3. Par composition $\frac{1}{F}$ est croissante et l'application $x \mapsto \frac{\frac{1}{F(x)}}{x} = \frac{1}{xF(x)} = \frac{1}{F\left(\frac{1}{x}\right)}$ est décroissante, donc d'après la question 4a) de la première partie $\frac{1}{F}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc F est bien continue.
4. On $I(x, y) = \frac{1}{y}F\left(\frac{x}{y}\right)$, donc par composition $(x, y) \mapsto I(x, y)$ est continue sur $(\mathbf{R}_+^*)^2$.

-IV-

1. L'égalité $u = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$ montre que $a \leq u \leq b$. On a donc

$$\begin{aligned} u = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} &\Leftrightarrow u^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi \\ &\Leftrightarrow u^2 = a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 \varphi \\ &\Leftrightarrow \sin^2 \varphi = \frac{u^2 - a^2}{b^2 - a^2} \\ &\Leftrightarrow \sin \varphi = \sqrt{\frac{u^2 - a^2}{b^2 - a^2}} \text{ car } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

D'où $\varphi = \arcsin\left(\sqrt{\frac{u^2 - a^2}{b^2 - a^2}}\right)$, $u \in [a, b]$. Ainsi, sur cet intervalle, on a :

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{\frac{d}{du}\left(\sqrt{\frac{u^2 - a^2}{b^2 - a^2}}\right)}{1 + \frac{u^2 - a^2}{b^2 - a^2}} = \frac{u}{\sqrt{(b^2 - u^2)(b^2 - a^2)}}$$

À l'aide du changement de variable $\varphi(u) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{u^2 - a^2}{b^2 - a^2}}\right)$, on obtient donc :

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \int_a^b \frac{du}{\sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)}}.$$

2. (a) La fonction h est bien définie et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ et on a :

$$\forall u \in [a, b], \quad h'(u) = \frac{u^2 - ab}{2u^2}.$$

D'où le tableau de variations de h :

u	a	$\alpha = \sqrt{ab}$	b
$h'(u)$	$-$	0	$+$
$h(u)$	$\frac{a+b}{2}$	$h(\alpha) = \sqrt{ab}$	$\frac{a+b}{2}$

- (b) Soit $u \in [a, b]$ et $v \in \left[\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right]$. On a :

$$\begin{aligned} h(u) = v &\Leftrightarrow \frac{u^2 + ab}{2u} = v \\ &\Leftrightarrow u^2 - 2uv + ab = 0 \\ &\Leftrightarrow u = v - \sqrt{v^2 - ab} \text{ ou } u = v + \sqrt{v^2 - ab} \end{aligned}$$

Le tableau de variations de la fonction h montre que, $\forall v \in [a, \alpha]$, $H_1(v) = v - \sqrt{v^2 - ab}$ et que $\forall v \in [\alpha, b]$, $H_2(v) = v + \sqrt{v^2 - ab}$.

3. Soit $u \in [a, b]$ et $v = h(u)$, on a :

$$\begin{aligned}
 2u\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - v^2} &= 2u\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{u^2+ab}{2u}\right)^2} \\
 &= \sqrt{u^2(a+b)^2 - (u^2+ab)^2} \\
 &= \sqrt{-u^4 + (a^2+b^2)u^2 - a^2b^2} \\
 &= \sqrt{-(u^2-a^2)(u^2-b^2)} = \sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}.
 \end{aligned}$$

Utilisons la relation de Chasles avec le point $\alpha = a_1$ et la relation précédente :

$$\begin{aligned}
 I(a, b) &= \int_a^\alpha \frac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}} + \int_\alpha^b \frac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}} \\
 &= \int_a^\alpha \frac{du}{2u\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - v^2}} + \int_\alpha^b \frac{du}{2u\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - v^2}} \\
 &= \int_a^{a_1} \frac{du}{2u\sqrt{b_1^2 - v^2}} + \int_{a_1}^b \frac{du}{2u\sqrt{b_1^2 - v^2}}
 \end{aligned}$$

4. (a) Sur l'intervalle $[a, \alpha]$, $v = h(u) \Leftrightarrow u = H_1(v) = v - \sqrt{v^2 - ab}$ et donc $\frac{du}{dv} = \frac{\sqrt{v^2 - ab} - v}{\sqrt{v^2 - ab}} = \frac{-u}{\sqrt{v^2 - a_1^2}}$.

De même sur l'intervalle $[\alpha, b]$, $v = h(u) \Leftrightarrow u = H_2(v) = v + \sqrt{v^2 - ab}$ et donc $\frac{du}{dv} = \frac{\sqrt{v^2 - ab} + v}{\sqrt{v^2 - ab}} = \frac{u}{\sqrt{v^2 - a_1^2}}$, d'où :

$$\begin{aligned}
 I(a, b) &= \int_a^{a_1} \frac{du}{2u\sqrt{b_1^2 - v^2}} + \int_{a_1}^b \frac{du}{2u\sqrt{b_1^2 - v^2}} \\
 &= \int_{b_1}^{a_1} \frac{-dv}{2\sqrt{v^2 - a_1^2}\sqrt{b_1^2 - v^2}} + \int_{a_1}^{b_1} \frac{dv}{2\sqrt{v^2 - a_1^2}\sqrt{b_1^2 - v^2}} \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} \frac{dv}{\sqrt{(b_1^2 - v^2)(a_1^2 - v^2)}} \\
 &= I(a_1, b_1)
 \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente et par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I(a, b) = I(a_n, b_n).$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < M(a, b)$. Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait à la fois :

$$\forall n \geq n_0, \quad |a_n - M(a, b)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |b_n - M(a, b)| \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{\sqrt{(M(a, b) + \varepsilon)^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}} \leq \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi + b_n^2 \sin^2 \varphi}} \leq \frac{1}{\sqrt{(M(a, b) - \varepsilon)^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}},$$

soit :

$$\frac{1}{M(a, b) + \varepsilon} \leq \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi + b_n^2 \sin^2 \varphi}} \leq \frac{1}{M(a, b) - \varepsilon},$$

et par croissance de l'intégrale, il vient facilement :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{\pi}{2(M(a, b) + \varepsilon)} \leq I(a_n, b_n) \leq \frac{\pi}{2(M(a, b) - \varepsilon)},$$

Le terme du milieu de l'encadrement précédent est constant, égal à $I(a, b)$, et ε peut être choisi aussi petit qu'on veut. Une fois qu'on a remplacé $I(a_n, b_n)$ par $I(a, b)$, on n'a plus de dépendance en n , on peut donc sans problème faire tendre ε vers 0, et il vient :

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}.$$

En particulier, si $a = x \in \mathbf{R}_+^*$ et $b = 1$ on obtient $I(x, 1) = \frac{\pi}{2M(x, 1)}$ ou encore $F(x) = \frac{\pi}{2f(x)}$.

• • • • •

-
1. Selon la formule de $I(a, b)$, le quart de périmètre de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est donné par la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}.$$

De telles intégrales, comme $I(a, b)$ sont appelés des intégrales elliptiques. L'étude des intégrales elliptiques par Gauss, Abel et Jacobi a jouée un rôle central dans le développement des mathématiques du XIX siècle